2008 年湖南省大学生数学竞赛试题（数学专业类）

1．计算极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\ln\dfrac{\tan x}{x}$。

2．设$f(x)=\begin{cases}x^2\arctan\dfrac{y}{x}-y^2\arctan\dfrac{x}{y}, & xy\neq 0\\ 0 & xy=0\end{cases}$，当$xy=0$时，求$f''_{xy}(x,y)$。

3．计算三重积分$\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}(x^2-x^2y+xy+y^2)dxdydz$。

4．计算第一型曲线积分$\int_\Gamma y^2ds$，其中Γ为下列方程组确定的曲线

$$\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2,\\ x+z=a.\end{cases}(a>0)。$$

5．设函数$f(x)$在$x=0$附近可微。$f(0)=0,f'(0)=a$。定义数列

$$x_n=f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right)。$$

证明$\{x_n\}$有极限并求其值。

6．设$f(x)$是实系数多项式。

（1）证明：x_0是$f(x)$的一个重根当且仅当$f(x_0)=f'(x_0)=0$。

（2）若$2x^3+3x^2-12x+a=0$有重根，试确定常数a。

（3）设$p(x),q(x)$均为多项式。证明：若$\dfrac{p(x)}{q(x)}$有极值，则存在常数λ使得$p(x)-\lambda q(x)$有重根。

（4）上述逆命题是否成立？若成立，给出证明；若不成立，举出反例。

7．证明函数$x,\sin x,e^x$在任意区间上是线性无关的。

8．（1）假设连续可微函数$f(x)$满足微分不等式$m\le f(x)+f'(x)\le M,x\in I$，其中$m,M$时常数，$I$是区间。证明：存在常数$C_1,C_2$，使得$m+C_1e^{-x}\le f(x)\le M+C_2e^{-x},x\in I$。

（2）如果二次连续可微函数$f(x)$满足微分不等式$m\le f''(x)+2f'(x)+f(x)\le M,x\in I$，

其中 m,M 时常数，I 是区间。试对 $f(x)$ 给出类似结论 1 的估计式（不需要证明过程）。

9．设 V 是数域 Ω 上向量空间，$\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2,\cdots,\mathbf{u}_n$ 是 V 中一组线性无关的向量，

$$T=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i\mathbf{u}_i \mid \sum_{i=1}^{n}a_i=0, a_i\in\Omega\right\}$$

证明 T 是 V 的子空间，且 $\dim T=n-1$。

10．设 A 是半正定矩阵，证明存在惟一一个半正定矩阵 B 使得 $A=B^2$。